17-12-18

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, συνεχής, παρ/μη (f γν. μονότονη) στο $\xi\in[a,b]: f'(\xi)\neq 0$
$\Rightarrow f^{-1}$ είναι παρ/μη στο $f(\xi)$ και $(f^{-1})' f(\xi) = \dfrac{1}{f'(\xi)}$

Απόδειξη

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y-h) - f^{-1}(y)}{h} \qquad (y=f(\xi))$$

$$\lim_{h\to 0} f^{-1}(y+h) = f^{-1}(y) = \xi$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\xi} \frac{x-\xi}{f(x)-f(\xi)} = \frac{1}{f'(\xi)}$$

$$(a^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{a^k-1}{h}\right) a^x = \ln a \cdot a^x$$

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} = \frac{1}{e^y} \overset{y=\ln x}{=} \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Έστω $x>0$ (ομοίως για $x<0$)
$f(x)=\ln x$
$f^{-1}(y)=e^y$

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cosh+\sin h\cos x-\sin x}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2\sin\frac{h}{2}\cdot\cos(x+\frac{h}{2})}{2} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\cancel{h/2}}^{\to 1}\cdot\cos(x+h/2) = \cos x$$

$\sin a - \sin b = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$((\cos x)' = (\sin(\pi/2 - x))' = \cos(\pi/2 - x)(\pi/2 - x)' = -\sin x$

τόξο → arcsin

$(\sin^{-1}y)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\sin^{-1}y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

$\cos(\sin^{-1}y) = \sqrt{1-\sin(\sin^{-1}y)^2} = \sqrt{1-y^2}$

<u>Τοπικά ακρότατα</u>

Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ το $\xi\in(a,b)$ ονομάζεται σημείο τοπικού μέγιστου της f ανν $\exists\, \delta>0$ τω $f(\xi)=\max \xi$, $x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$ $\Leftrightarrow \exists\, \delta>0$ ω. $\forall x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap[a,b]$, $f(x)\leq f(\xi)$

Το $\xi\in(a,b)$ ονομάζεται σημείο τοπικού ελάχιστου της f ανν $\exists\, \delta>0$ τω. $f(\xi)=\min f(\xi)$, $x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$ $\Leftrightarrow \exists\, \delta>0$ $\forall x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap[a,b]$, $f(x)\geq f(\xi)$

Ένα σημείο (ολικού) ακρότατου της f είναι σημείο τοπικού ακρότατου ανν το σημείο αυτό είναι εσωτερικό σημείο του $[a,b]$

<u>Θεώρημα</u>

Έστω $f:(a,b)$ συνεχής στο (a,b) και έστω ξ ($\xi\in(a,b)$) σημείο τοπικού ακρότατου της f. Αν η f είναι παρ/μη στο ξ, τότε $f'(\xi)=0$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο ξ.

$\exists\, \delta>0$ τω $(\xi-\delta,\xi+\delta)\subseteq(a,b)$ κ' $f(\xi)\geq f(x)$ τω $x\in(\xi-\delta,\xi+\delta)$

$$\left.\begin{aligned} f'_+(\xi) &= \lim_{x\to\xi^+} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \leq 0 \\ f'_-(\xi) &= \lim_{x\to\xi^-} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} \geq 0 \end{aligned}\right\} \xRightarrow{f'_+(\xi)=f'_-(\xi)} f'(\xi)=0$$

Θεώρημα → Διάστημα

Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ αύξουσα (αντ. φθίνουσα). Τότε, $f'(x) \geq 0$ (αντ. $f'(x) \leq 0$) $\forall x \in I$ τω. η f είναι παρ/μη στο x

Απόδειξη

Έστω ότι η f είναι παρ/μη στο $x \Rightarrow \forall x \in I$, $h>0$ (x εσωτερικό)

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \Rightarrow \underbrace{\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)} \geq 0$$

Θεώρημα

Έστω $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ παρ/μη στο $\xi \in (a,b)$ με $f'(\xi) \neq 0$

(i) Αν $f'(\xi)>0$ $\exists \delta>0$ τω $\forall x \in (\xi-\delta, \xi) \cap (a,b)$ να ισχύει $f(x)<f(\xi)$ κ' $\forall x \in (\xi, \xi+\delta) \cap (a,b)$ να ισχύει $f(x)<f(\xi)$

(ii) Αν $f'(\xi)<0$ τότε $\exists \delta>0$ τω οι ανισότητες στο (i) να αντιστρέφονται.

Απόδειξη

(i) $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} > 0 \Rightarrow \exists \delta>0$ τω. $\forall (\xi-\delta, \xi+\delta) \cap (a,b)$

να ισχύει $\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} > 0$

Αν $x \in (\xi, \xi+\delta) \Rightarrow x-\xi>0 \Rightarrow f(x)-f(\xi)>0$, $\forall x \in (\xi, \xi+\delta)$

Αν $x \in (\xi-\delta, \xi) \Rightarrow x-\xi<0 \Rightarrow f(x)-f(\xi)<0$, $\forall x \in (\xi-\delta, \xi)$

Θεώρημα (Darboux)

Αν f παρ/μη στο $[a,b]$, αν $f'(a) \neq f'(b) \Rightarrow$ Αν κ μεταξύ των $f'(a)$ κ' $f'(b)$, τότε $\exists\, \xi \in (a,b) : f'(\xi) = \kappa$

Παράδειγμα

Έστω $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1) \\ -1, & x \in [1,0] \end{cases}$

Να βρεθεί $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ τω $g'(x) = f(x)$ $\forall x \in [-1,1]$

Δεν υπάρχει.

Απόδειξη

Θέτω $g(x) = f(x) - \kappa x \Rightarrow g$ παρ/μη (άρα συνεχής) στο $[a,b]$

$\Rightarrow$ Η g παίρνει μέγιστη (έστω M) και ελάχιστη τιμή (έστω m) στο $[a,b]$

Περίπτωση 1 $\to$ Οι τιμές m ή M πιάνονται σε κάποιο $\xi \in (a,b)$

$\Rightarrow \xi$ είναι σημείο τοπικού ακρότατου για την $g \Rightarrow g'(\xi) = 0$

$\Rightarrow f'(\xi) = \kappa$

Περίπτωση 2 $\to$ ισχύει $g(a) = m$ κ' $g(b) = M$ ή $g(a) = M$ κ' $g(b) = m$.

Αν $m = M \Rightarrow g$ σταθερή $\Rightarrow g'(x) = 0$, $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f'(x) = \kappa$, $\forall x \in (a,b)$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m < M$

Έστω ότι $g(a) = m$, $g(b) = M$, $\forall\ x \geq a$ $\dfrac{g(x) - g(a)}{x - a} \geq 0$

$\Rightarrow g'(a) \geq 0 \Rightarrow f'(a) \geq \kappa$.

$\forall\ x \leq b$ $\dfrac{g(x) - g(b)}{x - b} \geq 0 \Rightarrow g'(b) \geq 0 \Rightarrow f'(b) \geq \kappa$

Άτοπο ($m < M$)